विद्यावाणी के सभी श्रोताओं को मेरा नमस्कार। मैं डॉ0 मनिन्दर सिंह अरोरा, P.P.N. (P.G.) college, kanpur के गणित विभाग में असिसटेंट प्रो0 के पद पर कार्यरत हूँ और आज आप के साथ Real number system के सिद्धान्त साझा करूँगा। हमारी यात्रा संख्या पद्यति से प्रारम्भ होगी तथा त्मंस छनउइमत`लेजमउ के कुछ महत्वपूर्ण व रोचक तथ्यों पर समाप्त होगी।

हम शरूवात करतें हैं धन पूर्णांको यानि प्राकृतिक संख्याओं अर्थात Natural numbers से ये वे संख्याएं है जो वस्तुओं को गिनने के काम आती है तथा प्रकृति के सबसे ज्यादा निकट है। प्राकृतिक संख्याएं 1 से प्रारम्भ होती है तथा 2,3,4,5,.... और इसी प्रकार अनवरत चलती रहती है। प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय को N से निरूपित करते है।

यदि प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय N से O को भी मिला ले तो हमें Whole numbers अर्थात पूर्ण संख्याओं का समुच्चय प्राप्त होता है जिसे हम प्रायः W से निरूपित करते है।

इसी कम मे यदि ऋणात्मक पूर्णांको को भी शामिल कर ले तो हमें पूर्णांको का समुच्चय प्राप्त होता है जिसे हम Set of Integers कहते है तथा I अथवा Z से निरूपित करते है इस प्रकार Set of Integers में 0, ±1, ±2, ±3 and so on संख्याएं होती है।

अब हम बात करते है परिमेय संख्याओं अर्थात Rational numbers के बारे मे। Rational शब्द के शुरूवाती 5 Alphabets है R,A,T,I,O अर्थात Ratio । इससे स्पष्ट है कि परिमेय संख्याएं वो संख्याएं है जो कि Ratio p/q के रूप में व्यक्त की जा सकती है। जहां p तथा q कोई भी पूर्णांक यानि Integers हो सकते है बस ध्यान रखें q का मान शून्य नहीं हो सकता।

परिमेय संख्याओ के समुच्चय को Q से निरूपित करते है तथा हमें Minus Infinity से Plus infinity तक हर जगह परिमेय संख्याएं प्राप्त होती है। उदाहरण के लिए

2, 2/1, 3/1, 1/2, 3/4, -5/7, 22/7 इत्यादि।

22/7 को सुनकर भ्रमित मत होइए, 22/7 पाई से मेरा तात्पर्य पाई नहीं है। पाई परिमेय संख्या नहीं है। 22/7, पाई का वास्तविक मान नहीं है बल्कि यह पाई का एक Rational approximation है। सभी पूर्णांक संख्याएं परिमेय संख्याएं है जैसे मैंने पहले भी बोला 2 को 2/1 भी कह सकते है यदि हम दशमलव में व्यक्त संख्याएं देखे तो परिमेय संख्याएं वो संख्याएं है जो या तो Terminating decimals हों जैसे कि 2.5, 3.14, 2.09 इत्यादि क्योंकि इन्हें हम कमशः 25/10, 314/100, 209/100 के रूप में Fractions में लिख सकते है इसके अतिरिक्त यदि कोई Non Terminating decimal हो तो वह भी Rational Number हो सकता है यदि उसमें दशमलव के बाद एक निश्चित Pattern बार बार Repeat होता है जैसे कि 1. 333333......., जो कि हम जानते है कि 4/3 के रूप में Fraction में व्यक्त किया जा सकता है।

आइए अब बात करते है अपरिमेय संख्याओं अर्थात Irrational numbers के बारे में। अपरिमेय संख्याएं, वो संख्याएं है जो कि परिमेय संख्याओं की तरह p/q के रूप में व्यक्त नहीं की जा सकती है।

मैं आपको बताता हूँ कि आखिर परिमेय संख्याओं के अतिरिक्त हमें अपरिमेय संख्याओं की आवश्यकता क्यों पड़ी? जब तक हम केवल परिमेय संख्याएं जानते थे तब तक कुछ गणनाएं हमारे लिए एक अबूझ पहेली थी जैसे कि 2 का वर्गमूल किसी भी प्रकार से p/q के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता।

और व्यावहारिक उदाहरण के तौर पर एक वर्ग लें जिसकी प्रत्येक भुजा 1 c.m. हो। ऐसे वर्ग के विकर्ण की लम्बाई की गणना सटीक रूप से किसी भी परिमेय संख्या द्वारा नहीं की जा सकती क्योकि अब हम जानते है कि यह एक अपरिमेय संख्या होगी। जो कि 2 का वर्गमूल होगी। यदि हम दशमलव मे व्यक्त संख्याएं देखें तो अपरिमेय संख्याएं वे संख्याएं है जो न तो Terminating decimals हो और Non terminating Repeating Decimals न तो यह सिद्ध करना सरल है कि 2,3,5 इत्यादि के वर्गमूल तथा घनमूल अपरिमेय संख्याएं है इसके अतिरिक्त पाई , e इत्यादि भी अपरिमेय संख्याओ के उदाहरण है।

अब आते है वास्तविक संख्याओं अर्थात् Real numbers पे। अभी तक हमने जितनी भी संख्याओं की चर्चा की वो सभी Real numbers है। कहने का अर्थ है कि यदि परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओ को मिला ले तो वास्तविक संख्याओं का समुच्चय प्राप्त होता है। जिसे हम प्रायः चर्चा का केन्द्र है। और यही समुच्चय आज की हमारी चर्चा का केन्द्र है। अभी तक चर्चा के सारांश के रूप मे मै यह कहना उचित समझता हूँ कि Real numbers system, Natural number system के उत्तरोत्तर विस्तार का ही परिणाम है।

अब हम बात करेंगे Intervals के बारे में। यदि हम Intervals को तथा उनकी अनन्त सघनता को समझ लेते है तो हमारे लिए Real analysis की राह आसान हो जाएगी। Intervals, Real analysis set R के ऐसे Subject होते है जिनमें किन्ही दो दी गयी वास्तविक संख्याओं a तथा b के बीच की सभी वास्तविक संख्याएं होती है ऐसे Interval को Interval a,b पढा जाता है। तथा a,b को Interval उस के end point कहा जाता है। अब प्रश्न यह उठता है कि a तथा b के बीच की सभी वास्तविक संख्याएं तो हमें लेनी होती है, परन्तु क्या end point a तथा b को भी Intervals में लिया जाता है। इस आधार पर Intervals को हम closed या open interval की Categories में बांट सकते है।

Closed interval a,b का अर्थ होता है a तथा b और उनके बीच की सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय और Closed interval a,b को बडे Brackets के अन्दर a,b लिख कर निरूपित किया जाता है।

यदि a,b में से केवल एक संख्या को Interval में शामिल किया जाता है तो Interval semi open अथवा semi closed कहलाता हैं

चलिए अब समझते है कि एक Interval में कितनी संख्याएं होती है तथा Interval में कितने सघन होते है। हम जानते है कि दो संख्याओं Mean का उनके मध्य की एक संख्या होती है जो कि उन दोनो संख्याओं से भिन्न होती है। यदि हम एक Interval ले जिसके End point a,b हो तो a+b/2 (जो कि a तथा b का Mean है) a तथा b के मध्य होने के कारण उसी Interval का Element होगीं। यदि a+b/2 को c मान लें और हम Interval a,b को दो sub intervals (a,c) तथा (c,b) में तोडकर उपरोक्त प्रकिया फिर से अपनायें तो हमें a+c/2 तथा c+b/2 के रूप में दो नई संख्याएं प्राप्त होंगी और ये संख्याएं भी a तथा b के बीच की ही संख्याएं होगी। अब यही process continue रखें तो हम आसानी से समझ सकते है कि किसी भी Interval में अनन्त वास्तविक संख्याएं होती है।

Intervals की deneseness (सघनता) समझने के लिए हम closed interval (0,1) का उदाहरण लेते है हम यह जान चुके है कि इस में अनन्त संख्याएं होंगी। उन्ही में से कोई दो संख्याएं जैसे 0.4 और 0.5 ले तो इनके मध्य फिर से अनन्त संख्याएं मिलेगी जैसे कि 0. 44 और 0.45 इत्यादि अब 0.44 तथा 0.45 के मध्य भी अनन्त संख्याएं मिलेंगी। इसी से अंदाजा लगाया जा सकता है कि Interval के elements कितने सघन होते है।

यहां पर एक प्रश्न मै रखता हूँ कि 1 से ठीक छोटी कौन सी वास्तविक संख्या होगी? क्या वह 0.9 या फिर 0.99 या फिर 0.999 या फिर कोई और?

अब हम बात करेंगें Bounded, unbounded, sets तथा supremum, infimum और greatest, smallest elements of a set के बारे में वास्तविक संख्याओं का एक "S" bounded above कहलाता है यदि एक ऐसा मिले fixed ral number 'u' जिससे "s" के सभी elements छोटे या बराबर हों। तब 'u' को "S" का एक upper bound कहते है। यदि "s" के सभी elements 'u' से छोटे या बराबर है तो 'u' से बडी संख्याओं से भी छोटे होगें। अतः यदि 'u' set 's' का upper bound है तो 'u' से बडी सभी संख्याएं set 's' की upper bound होगी परन्तु 'u' से छोटी कोई संख्या upper bound होगी अथवा नहीं यह कहना मुश्किल है। इससे स्पष्ट है कि एक Bounded above set के लिए उसका greatest upper bound कोई महत्त्व नहीं रखता बल्कि last upper bound एक निश्चित एवं महत्वपूर्ण संख्या होती है। last upper bound को ही set का superemum कहते है प्रत्येक Bounded above set का एक unique supremum होता है जबकि upper bound अनन्त होते है।

अब हम supremum के बारे में विस्तार से बात करते है। यदि "s" एक Bounded above set तो एक fixed real no. 'y' 's' का supremum कहलाता है यदि 'y' 's' का एक upper bound हो और 'y' से छोटी कोई भी संख्या 's' का upper bound न हो दूसरे शब्दो में set 's' के सभी elements 'y' से छोटे या बराबर हो तथा यदि हम 'y' से छोटी कोई भी संख्या ले तो उससे

बडे elements set 's' में मौजूद हों। supremum के बारे में एक महत्वपूर्ण बात यह भी है कि किसी set का supremum उस set को belong करता हो यह आवश्यक नही ।supremum के अलावा एक और Term है "Greatest element of a set" परन्तु यह दोनों एक दूसरे से भिन्न होते है इन दोनो में क्या अन्तर है आइए समझते है।

"Greatest element of a set" से मतलब है, set का सबसे बडा element अर्थात set का वो element जिससे के सभी अवयव छोटे या बराबर हो यानि कि set का ही वो अवयव जो set का upper bound भी हो। निश्चित रूप से यदि किसी set का greatest element exist करता हो तो वही set का least upper bound अर्थात supremum होगा। परन्तु किसी set का supremum उसका greatest element हो यह आवश्यक नही होता। यहां तक कि प्रत्येक bounded above set का supremum मिलना तय होता है परन्तु greatest element भी exist करे, यह आवश्यक नहीं होता। supremum set का या set के बाहर का element भी हो सकता है परन्तु greatest element set का ही अवयव होता है।

इन सभी चीजों को ठीक से समझने के लिए हम open interval (0,1) का उदाहरण लेते है। जैसा कि मैने आपको पहले भी बताया open interval (0,1), 0 से बडी तथा 1 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होता है।

क्या आप बता सकते है इस set का सबसे बडा अर्थात greatest element क्या होगा? क्या वह 1 होगा? नहीं क्योंकि 1 open interval (0,1) का element नहीं होता और Greatest element of a set से तात्पर्य होता है set का ही सबसे बडा element। तो फिर open interval (0,1) का सबसे बडा अवयव क्या होगा? क्या,0.999? नहीं क्योंकि उससे बडा 0.9999 भी open interval (0,1) में मौजूद है। उत्तर यह है कि open interval (0,1) का greatest element exist नहीं करता।

चलिए अब समझते हैं कि क्या set bounded above यह है, और यदि है तो इसका supremum क्या होगा?

पहली बात तो यह कि open interval (0,1) bounded above है क्योंकि इसके सभी elements 1 से छोटे है। अतः 1 इसका एक upper bound हुआ। इसके अतिरिक्त 1.1, 1.01 या 1 से बडी प्रत्येक संख्या इस set का upper bound होगी। परन्तु 1 से छोटी कोई भी fixed संख्या इस सेट का upper bound नहीं हो पाएगी, क्योंकि यदि हम 1 से छोटी कोई भी संख्या ले लें तो उसके तथा 1 के मध्य अभी भी अनन्त संख्याएं हैं जो कि open interval (0,1) के elements है। उदाहरण के लिए यदि हम 1 से छोटी संख्या 0.99 ले तो यह संख्या open interval (0,1) का upper bound नहीं है क्योंकि open interval (0,1) में ही एक element 0.999 है जो कि 0.99 से छोटा नहीं है। अतः हम कह सकते है कि 1 open interval (0,1) का एक ऐसा upper bound है जिससे छोटी कोई भी संख्या open interval (0,1) का upper bound नहीं होगी । अर्थात 1 open interval (0,1) का least upper bound यानि supremum है, जबकि इसका greatest element exist ही नहीं करता।

दूसरा उदाहरण लेते हैं closed interval (0,1) का।

जैसा कि मैंने पहले बताया closed interval (0,1) में 0 तथा 0 से बड़ी और 1 तथा 1 से छोटी सभी संख्याएं होंगी। closed interval (0,1) का greatest element exist नहीं करता परन्तु closed interval (0,1) का greatest element 1 होता है क्योंकि 1 closed interval (0,1) का ही element है जिससे set के सभी elements छोटे या बराबर हैं। इसके अतिरिक्त यह भी समझना सरल है कि closed interval (0,1) का supremum भी 1 है।

अब उदाहरण लेते हैं प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय N का। प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय N bounded above नहीं है। क्योंकि कोई भी ऐसा Real number exist नहीं करता जिससे Natural numbers सभी छोटे या बराबर हों।

इसी प्रकार पूर्णाको का समुच्चय I, Rational numbers का Set Q, Real numbers का Set R भी Bounde above नहीं है। परन्तु Negative integers का Set bounded above है −1 और इसका Greatest element तथा supremum है।

चलिए आगे बढ़ते हैं bounded below sets, lower bound, infimum तथा smallest element of a set की ओर। वास्तविक संख्याओं का subject S bounded below एक कहलाता है यदि एक ऐसा fixed real number L मिले जिससे S के सभी elements बड़े या बराबर हों। तब L को S का एक lower bound कहते है यदि S के सभी elements L से बड़े या बराबर हैं तो L से छोटी संख्याओं से भी बड़े होंगे अतः L के lower bound होने पर L से छोटी सभी संख्याएं भी lower bound होंगी परन्तु L से बडी संख्या lower bound होगी अथवा नहीं यह कहना मुश्किल है। इससे स्पष्ट है कि किसी bounded below set के अनन्त lower bounds होंगे और smallest lower bound कोई महत्व नहीं रखता बल्कि Greatest lower bound एक निश्चित एवं महत्वपूर्ण संख्या होती है। Greatest lower bound को set ही का infirmum कहते है। प्रत्येक bounded below set का एक unique infirmum होता है एक fixed real number 'i' किसी bounded below set 's' का infirmum होगा यदि वह निम्न शर्ते पूरी करता हो

पहली कि 'i' 's' का एक lower bound हो तथा दूसरी कि 'i' से बडी कोई भी संख्या 's' का lower bound न हो। जैसा कि हमने supremum के बारे में देखा उसी प्रकार किसी set का infirmum उस set को करें यह आवश्यक नहीं होता। फिर जैसे हमने और का तुलनात्मक अध्ययन किया उसी प्रकार और का भी तुलनात्मक अध्ययन होता है। यदि कोई है, तो उसका मिलना तो तय होता है परन्तु उसका करे, यह आवश्यक नहीं होता।

का अथवा के बाहर का भी हो सकता है परन्तु का ही होता है।

अभी तक हमने तथा देखे। जो तथा दोनों होते है, कहलाते है। तथा जो नहीं होते है कहलाते है। प्राकृतिक संख्याओं का तो है पर नहीं अतः हुआ। इसी प्रकार व भी है। अब कुछ उदाहरण देखते है के

पहला उदाहरण लेते हैं पहली पॉच प्राकृतिक संख्याओं का जिसमें केवल पॉच है 1,2,3,4,5 यह स्पष्ट है कि इस के सभी 1 से बड़े या बराबर तथा 5 से छोटे या बराबर है। अतः यह भी है तथा भी। इस प्रकार से यह है तथा इसका और 5 तथा इसका और 1 है।

एक और उदाहरण लेते है सभी प्राकृतिक संख्याओ के के का। अर्थात वो जिसके इत्यादि है। यह मैं आपके सोचने के लिए छोड देता हूँ कि इस का और '1' है परन्तु इसका नहीं करता जबकि '0' है।

अब हम बात करेंगे की कुछ बहुत ही के बारे में।

पहले लेते है जो कि यह कहती है कि यदि तथा कोई भी दो हों तो एक ऐसा करता है जिसके लिए तथा का गुणनफल से बडा होता है। समझने के लिए यदि को 0.05 तथा को 2.9 ले लें तो का मान लेने पर तथा का गुणनफल आता है जो कि के मान 2.9 से बडा है की सहायता से हम कुछ और रोचक कर सकते हैं जिनके कथान इस प्रकार हैं–

1. यदि हम कोई भी लें तो उससे बडा सदैव करता है।

2. दूसरा एक बहुत ही महत्वपूर्ण है जिसे हम कहते हैं। यह कहता है कि किन्हीं भी दो के बीच में चाहे वो कितने भी निकट क्यों न हों, अनन्त करते है। इसी प्रकार यह कहता है कि किन्हीं भी दो के बीच में अनन्त करते है। अतः हम यह कह सकते है। कि किसी भी में अनन्त तथा अनन्त विद्यमान होते है।

आप सभी को मुझे धैर्यपूर्वक सुनने के लिए धन्यवाद। आपकी कोई भी हो तो आप मुझे मेरी पर कर सकते है।

जय हिन्द।